Der Konstruktionsbericht

Philipp Gressly Freimann

27. August 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Als ich zur Schule ging, konnte ich zwar mehr oder weniger gute Konstruktionsberichte schreiben, aber ich hatte immer ein ungutes Gefühl dabei, weil ich nie **exakt** wusste, was mit einem “Konstruktionsbericht” gemeint war.
Dieser kleine Artikel soll genau Auskunft geben, was im Konstruktionsbericht stehen soll und darf. Mit den Definitionen aus diesem Artikel sollen Schüler bzw. Lehrer in der Lage sein, zu entscheiden bzw. zu erklären, warum etwas in einem Konstruktionsbericht fehlt, oder allenfalls etwas zu viel ist.
Falls eine Aufgabe mehrere Lösungen hat, werde ich das lediglich in den Bemerkungen erwähnen, damit ich die Definition des **Konstruktionsberichtes** übersichtlich gestalten kann.

2 Grundkonstruktionen (G1, G2, G3)

Der Begriff **Konstruktion** steht kurz für *geometrische Konstruktion in einer Ebene mit Bleistift, Lineal und Zirkel.*
Definition: Konstruktion

> Eine **Konstruktion** ist eine Folge, die aus den drei Grundkonstruktionsschritten
>
> a) Punkte bezeichnen,
>
> b) Geraden ziehen und
>
> c) Kreise zeichnen
>
> besteht. Dabei kann jede Grundkonstruktion mehrmals auftreten. Eine Konstruktion spielt sich immer in einer wohldefinierten (Zeichnungs-) Ebene ab.

Definition: Konstruktionsbericht

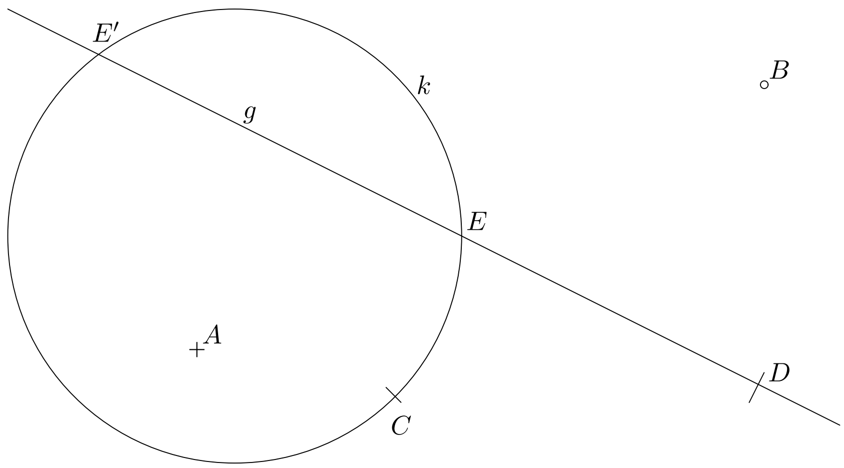
> Ein **Konstruktionsbericht** ist das Protokoll der Grundkonstruktionen, die für die Konstruktion nötig sind.

Wie im nächsten Kapitel (3 auf Seite 6) gezeigt wird, dürfen häufig verwendete Abfolgen von Grundkonstruktionen im Konstruktionsbericht zusammengefasst werden. Später werden sehr häufig verwendete abgeleiteten Konstruktionen auch im Bericht stehen (wie z. B. die *Mittelsenkrechte*).
Die drei Grundkonstruktionen sind übrigens einfach zu merken, denn zu jeder gehört ein Zeichnungsgerät:

- Zum *Punkte wählen* gehört der **Bleistift**,
- zum *Ziehen von Geraden und Strecken* gehört das **Lineal** und
- das *Konstruieren von Kreisen* geschieht mit dem **Zirkel**.

2.1 G1: Punkte wählen (Bleistift)

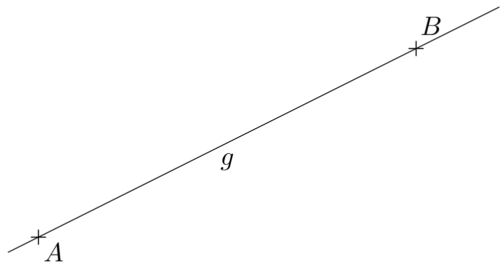
Gegeben:	evtl. Kreise, Geraden
Gesucht:	Punkte
Im Bericht:	A wählen
	B wählen
	C auf k wählen
	D auf g wählen
	E, E' := Schnittpunkte von g und k
	$E, E' := g \cap k$
Sprich:	"Wähle einen Punkt."
	"Bezeichne einen Punkt."



Bemerkung 1 Punkte in der Ebene werden durch ein Kreuz (A) beziehungsweise einen möglichst kleinen Kreisring dargestellt (B). Für Kreismittelpunkte wird oft der kleine Kreisring verwendet, da die Einstichstelle des Zirkels genauer gesehen werden kann. Punkte auf Linien (Geraden oder Kreislinien) werden durch kurze senkrechte Striche markiert (C und D). Schnittpunkte werden nur mit einem Buchstaben versehen (E und E').
Bemerkung 2 Alle Punkte werden mit **Großbuchstaben** gekennzeichnet. Alle Linien (Kreise und Geraden) erhalten **Kleinbuchstaben**.

2.2 G2: Geraden ziehen (Lineal)

Gegeben:	zwei Punkte (A und B)
Gesucht:	Gerade g durch A und B
Im Bericht:	A und B verbinden (oder verlängern)
	$g := AB$
Sprich:	"lege eine Gerade durch zwei gegebene Punkte"

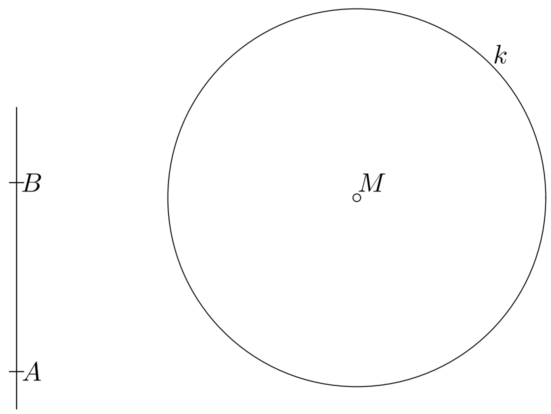


Bemerkung 1 AB bezeichnet die Gerade g. $\overline{AB}$ bezeichnet die Strecke von A bis B.

Bemerkung 2 In manchen Lehrbüchern wird auch das *Wählen einer Geraden* als Grundkonstruktion erwähnt. Wenn wir jedoch zwei Punkte frei wählen dürfen, kann die Wahl einer Geraden auch auf die Wahl von zwei Punkten (Grundkonstruktion 1) und das ziehen einer Geraden durch die eben gewählten Punkte (Grundkonstruktion 2) zurückgeführt werden.

2.3 G3: Kreise (Zirkel)

Gegeben:	M = Mittelpunkt $\overline{AB}$ = Radius
Gesucht:	Kreis k um M mit Radius $\overline{AB}$
Im Bericht:	$k(M, \overline{AB})$
Sprich:	"Zeichne einen Kreis um einen gegeben Punkt mit gegebenem Radius."



Bemerkung 1 $k(M, \overline{AB}) = k(M, \overline{BA})$.

Bemerkung 2 In einigen Lehrbüchern sind die Voraussetzungen für das Zeichnen von Kreisen etwas anders. Dort ist der Mittelpunkt M und ein weiterer Punkt P gegeben. Gesucht ist dann ein Kreis mit Mittelpunkt M, dessen Kreislinie (oder Peripherie) durch den Punkt P geht. Ein Übertragen der Strecke (also ein «Herumtragen des Zirkels» mit Gefahr den Radius zu verändern) ist dabei nicht nötig. Aus jener alternativen Grundkonstruktion kann unsere obige Konstruktion G3 auch gewonnen werden. Unsere Grundkonstruktion G3 wird auch als Streckenübertragung bezeichnet. Die Streckenübertragung kann aber z. B. auch mit Hilfe eines Parallelogrammes vollzogen werden. Das Lot (vgl. 3.5 auf Seite 10) kommt alleine mit der Konstruktion $k(A, \overline{AB})$ aus. Somit kann mit mehrfachem Anwenden des Lots die Konstruktion $k(M, \overline{AB})$ auch aus der Konstruktion $k(P, \overline{PQ})$ gewonnen werden.

Gegeben:	Drei Punkte A, B und M
Gesucht:	$k(M, \overline{AB})$

Konstruktionsbericht zu G3 alternativ:

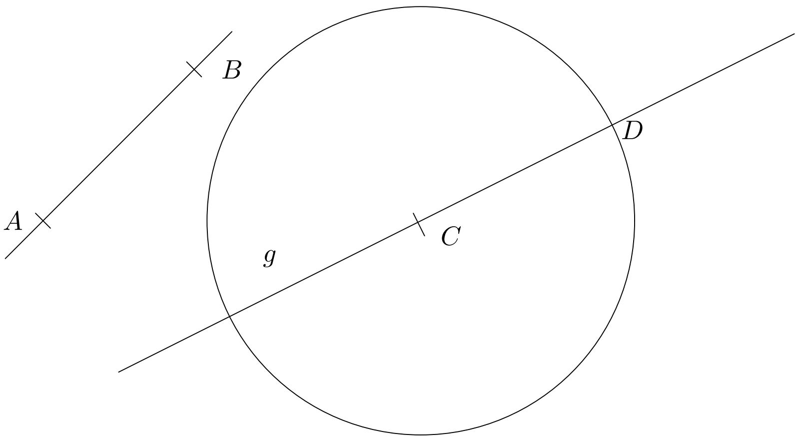
1. $r := AB$
2. $g := AM$
3. $m :=$ Lot duch M auf r
4. $n :=$ Lot duch M auf m
5. $b :=$ Lot duch B auf g
6. $h :=$ Lot duch B auf b
7. $P := h \cap n$
8. $k := k(M, \overline{MP}) = k(M, \overline{AB})$

3 Abgeleitete Konstruktionen

Die nun folgenden abgeleiteten Konstruktionen werden wir beim Konstruieren so häufig verwenden, dass sie alle einen eigenen Namen bekommen. Wir dürfen dann jede der **in diesem Kapitel** abgeleiteten Konstruktionen auch in unseren Konstruktionsberichten verwenden und müssen nicht immer die Grundkonstruktionen verwenden.

3.1 A1: Strecken übertragen

Gegeben:	Strecke $\overline{AB}$
	Gerade g
Gesucht:	Strecke der Länge $\overline{AB}$ auf g
Im Bericht:	$\overline{AB}$ auf g übertragen
Sprich:	"Übertrage die Strecke $\overline{AB}$ auf g."



Im Gegensatz zu den Grundkonstruktionenen haben die abgeleiteten Konstruktionen einen Konstruktionsbericht.
Konstruktionsbericht zu A1:

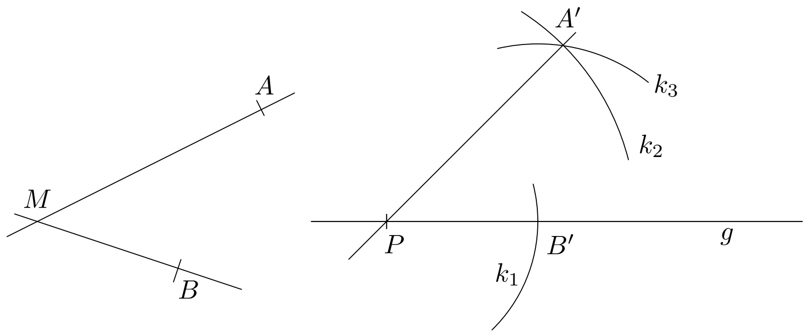
1.	C auf g wählen (G1)
2.	$k(C, \overline{AB})$ (G3)
3.	$D := k \cap g$ (G1)

Bemerkung Die Schritte zwei und drei können zusammengefasst werden:
Konstruktionsbericht zu A1:

1.	C auf g wählen (G1)
2.	$k(C, \overline{AB}) \to D$ (G3, G1)

3.2 A2: Winkel übertragen

Gegeben:	$\sphericalangle AMB$
	Gerade g
	Punkt P auf g
Gesucht:	Gleich großer Winkel mit Zentrum P und einem Schenkel auf g
Im Bericht:	$\sphericalangle AMB$ auf g in P übertragen
Sprich:	"Übertrage den Winkel AMB im Punkt P auf die Gerade g."



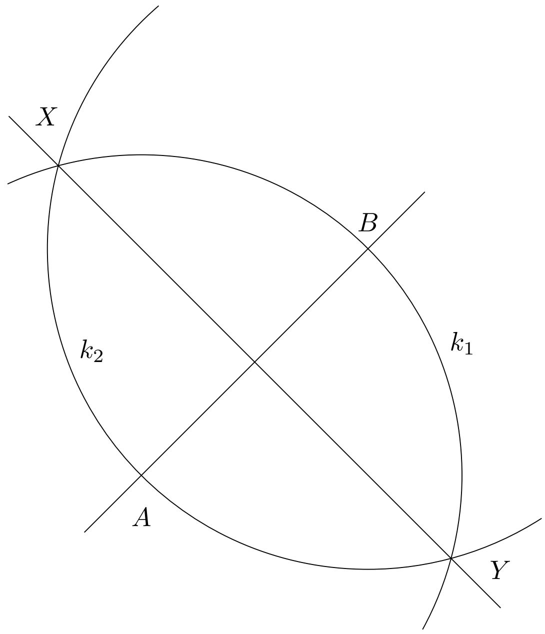
Konstruktionsbericht zu A2:

1. $k_1(P, \overline{MB}) \to B'$ (G3, G1)
2. $k_2(P, \overline{AM})$ (G3)
3. $k_3(B', \overline{AB}) \to A', A''$ (G3, G1)
4. $h := PA'$ bzw. $h' := PA''$ (G2)

Bemerkung die Aufgabe hat zwei Lösungen: $A'PB'$ und $A''PB'$. In der obigen Zeichnung ist wegen der Übersichtlichkeit nur eine Lösung abgebildet.

3.3 A3: Die Mittelsenkrechte (MSR)

Gegeben:	$\overline{AB}$ = zu halbierende Strecke
Gesucht:	Gerade m die a) $\overline{AB}$ halbiert und b) senkrecht auf AB steht
Im Bericht:	m := MSR auf $\overline{AB}$
Sprich:	"Konstruiere die Mittelsenkrechte auf die Strecke $\overline{AB}$."

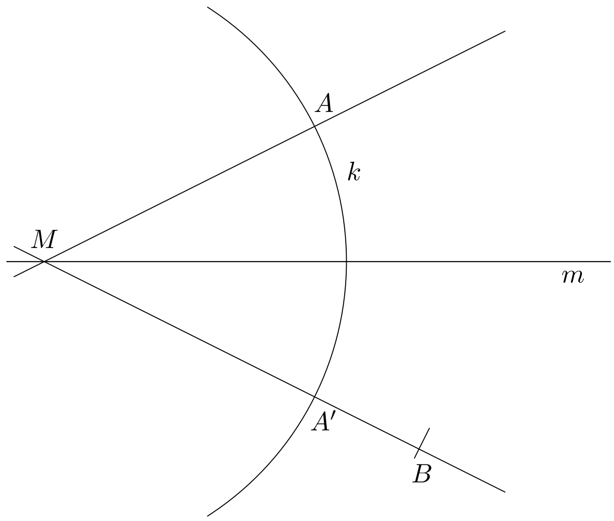


Konstruktionsbericht zu A3:

1. $k_1(A, \overline{AB})$ (G3)
2. $k_2(B, \overline{AB}) \to X, Y$ (G3, G1)
3. $m := XY$ (G2)

3.4 A4: Die Winkelhalbierende

Gegeben:	$\sphericalangle AMB$
Gesucht:	Gerade, die AMB halbiert
Im Bericht:	$m :=$ Winkelhalbierende zu AMB
Sprich:	"Konstruiere die Winkelhalbierende zum Winkel AMB."



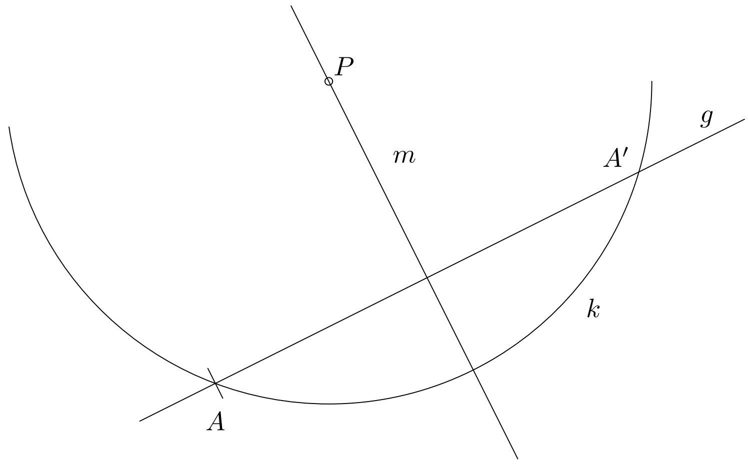
Konstruktionsbericht zu A4:

1. $k(M, \overline{MA}) \to A'$ (G3, G1)
2. $m :=$ MSR auf $\overline{AA'}$ (A3)

Bemerkung In diesem Konstruktionsbericht wird zum ersten mal gezeigt, wie bereits durchgeführte abgeleitete Konstruktionen eingesetzt werden. Die Winkelhalbierende kann einfacher und auch genauer durchgeführt werden; dann ist der Konstruktionsbericht aber nicht mehr so elegant.

3.5 A5: Lot

Gegeben:	Gerade g
	Punkt P
Gesucht:	Gerade durch P, die g senkrecht schneidet
Im Bericht:	$m :=$ Lot auf g durch P
Sprich:	"Konstruiere das Lot auf die Gerade g durch den Punkt P."



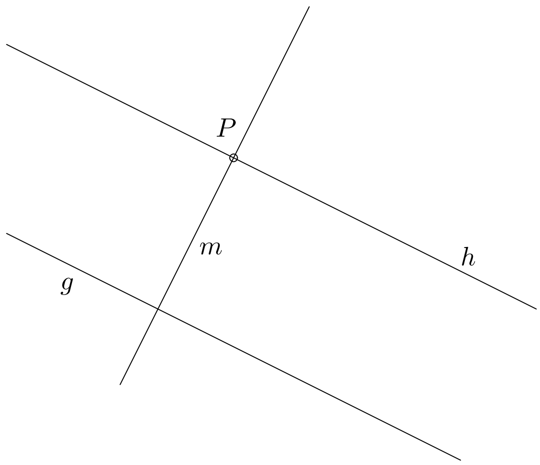
Konstruktionsbericht zu A5:

1.	A auf g wählen $(A \neq P)$ (G1)
2.	$k(P, \overline{PA}) \to A'$ (G3, G1)
3.	$m :=$ MSR auf $\overline{AA'}$ (A3)

Bemerkung diese Konstruktion funktioniert auch, wenn P auf g liegt.
Die Konstruktion des Lots kann viel genauer mit dem GEO-Dreieck gezeichnet werden.

3.6 A6: Parallele zu einer Geraden

Gegeben:	Gerade g
	Punkt P
Gesucht:	Parallele zu g durch P
Im Bericht:	$h :=$ Parallele zu g durch P
Sprich:	“Konstruiere die Parallele zur Geraden g durch den Punkt P.”



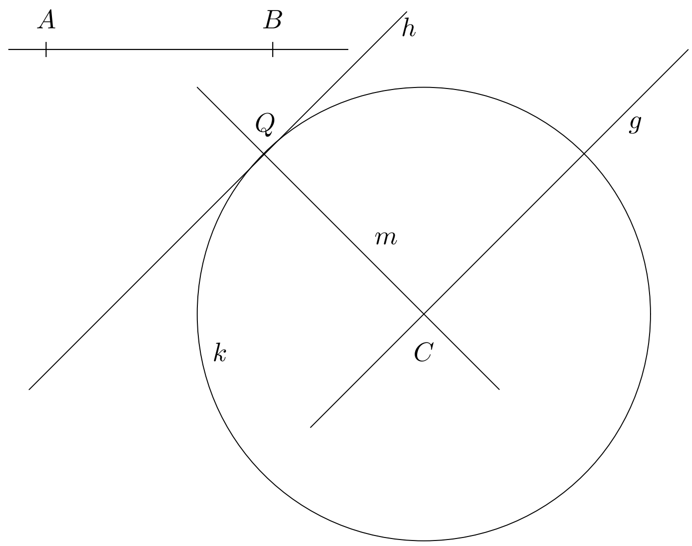
Konstruktionsbericht zu A6:

1.	$m :=$ Lot auf g durch P (A5)
2.	$h :=$ Lot auf m durch P (A5)

Bemerkung Die Parallele zu einer Geraden durch eine Punkt, darf wie das Lot mit dem GEO-Dreieck gezeichnet werden.

3.7 A7: Parallele zu einer Geraden im Abstand einer Strecke

Gegeben:	Gerade g
	Strecke $\overline{AB}$
Gesucht:	Parallele zu g im Abstand von $\overline{AB}$
Im Bericht:	$h :=$ Parallele zu g im Abstand von $\overline{AB}$
Sprich:	"Konstruiere die Parallele zur Geraden g im Abstand der Strecke $\overline{AB}$."



Konstruktionsbericht zu A7:

1. wähle C auf g (G1)
2. $k(C, \overline{AB})$ (G3)
3. $m :=$ Lot zu g durch C (A5)
4. $Q(Q') := m \cap k$ (G1)
5. $h :=$ Parallele zu g durch Q (A6)

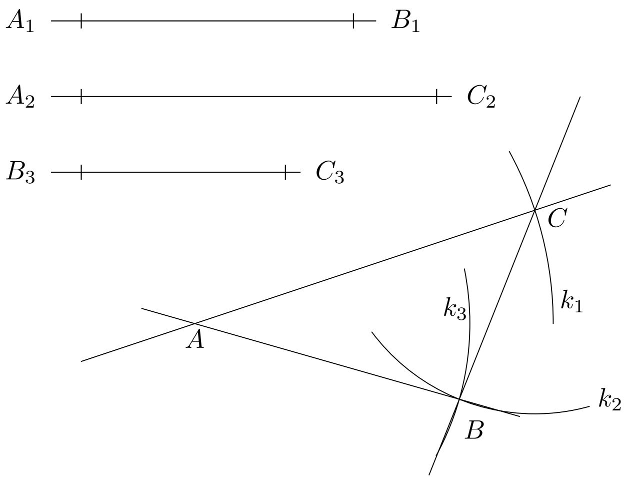
Bemerkung Die Aufgabe hat zwei Lösungen. Falls die Strecke $\overline{AB}$ als Länge gegeben ist (z. B.: $\overline{AB} = 3\text{cm}$), so kann diese Konstruktion direkt mit dem GEO-Dreieck durchgeführt werden.

4 Beispiele und Anwendungen

Bemerkung Der Term **"Im Bericht"** kommt in den Beispielen nicht mehr vor. Diese Beispiele dürfen nicht als einzelne Konstruktionsschritte verwendet werden.

4.1 B1: Dreieck aus drei gegebenen Seiten

Gegeben:	Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2C_2}$ und $\overline{B_3C_3}$
Gesucht:	Dreieck ABC mit den gegebenen Seiten
Sprich:	"Konstruiere ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten."

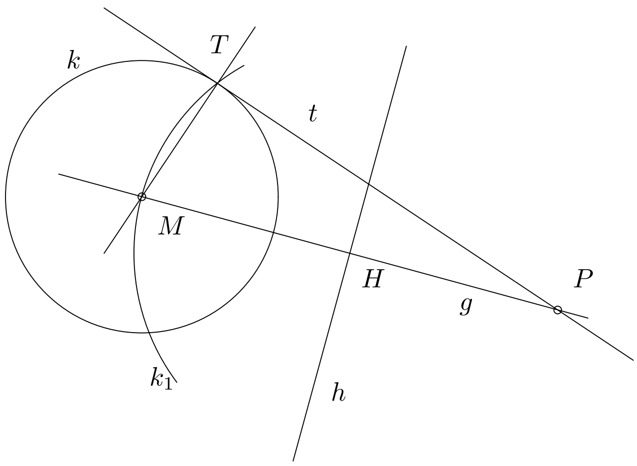


Konstruktionsbericht zu B1:

1.	wähle A (G1)
2.	$k_1(A, \overline{A_2C_2})$ (G3)
3.	C auf k_1 wählen (G1)
4.	$k_2(C, \overline{B_3C_3})$ (G3)
5.	$k_3(A, \overline{A_1B_1}) \to B, B'$ (G3, G1)
6./7./8.	AB, BC und AC verbinden (3× G2)

4.2 B2: Tangente an einen Kreis

Gegeben:	Kreis k mit Mittelpunkt M
	Punkt P außerhalb von k
Gesucht:	Tangente t an k durch P
Sprich:	"Konstruiere die Tangente(n) an k durch P."



Konstruktionsbericht zu B2:

1. $g := MP$ (G2)
2. $h :=$ MSR auf $\overline{MP}$ (A3)
3. $H := h \cap g$ (G1)
4. $k_1(H, \overline{MH}) \to T(T')$ (G3, G1)
5. $t := PT$ (G2)

Bemerkung Diese Aufgabe ist typisch. Es handelt sich nicht um eine abgeleitete Konstruktion, die in eigenen Konstruktionsberichten wieder verwendet werden darf. Selbst das GEO-Dreieck kann diese Konstruktion nicht vereinfachen oder genauer zeichnen. Eine zulässige Abkürzung der Schritte 1 bis 4 ist "$k_1 :=$ Thaleskreis auf MP", sofern der "Thaleskreis" im Unterricht bereits eingeführt worden ist. Der Konstruktionsbericht liest sich dann:

Konstruktionsbericht zu B2:

1. $k_1 :=$ Thaleskreis auf $\overline{MP} \to T(T')$ (G3, G1)
2. $t := PT$ (G2)

Bemerkung Die Aufgabe hat zwei Lösungen.